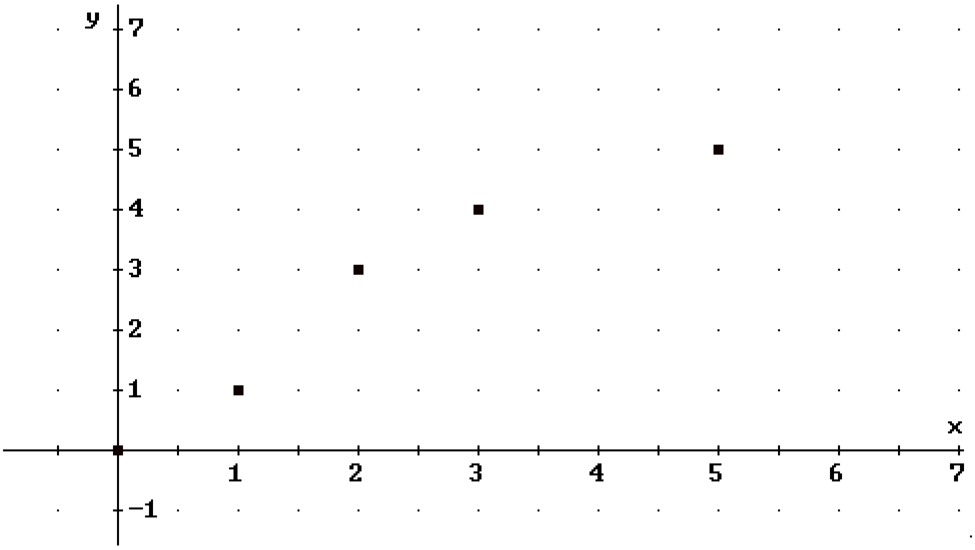
Spline Interpolation

Das Problem:
Vorgegeben ist eine Anzahl von Punkten in einem Koordinatensystem.

$P_0(0|0)$, $P_1(1|1)$, $P_2(2|3)$, $P_3(3|4)$, $P_4(5|5)$

Welche Form nimmt ein längliches, dünnes Stück Holz oder Metall (spline) an, das in diesen Stützpunkten gelenkig gelagert ist und dort keinen äußeren Kräften unterliegt?
Zeichne den möglichen Verlauf von Hand oder mit einem Kurvenlineal in die Abbildung ein.

$$\#1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$



1. Versuch: Das Stützstellenpolynom
Wir ermitteln eine ganzrationale Funktion 4. Ordnung als Lösung der Steckbriefaufgabe.
Arbeite das DERIVE-Protokoll durch und zeichne die vorgegebenen Punkte und den Graphen der Funktion. Vergleiche mit dem oben gezeichneten Graphen.

Das Stützstellenpolynom (Ansatz):

$$\#2: \quad F(x) := a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

Die Bedingungen:

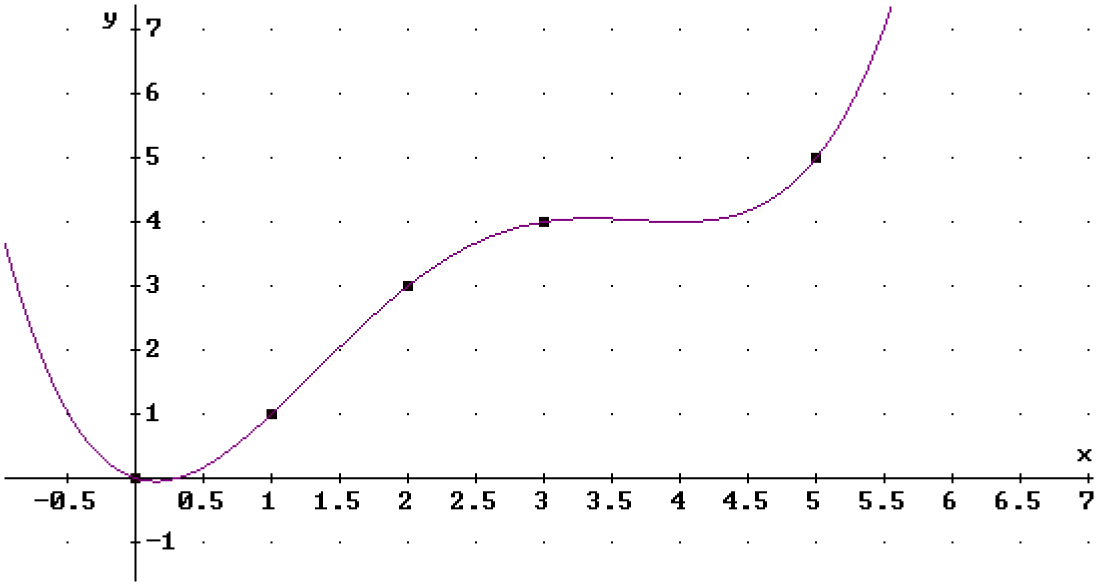
```
#3:    SOLVE([F(0) = 0, F(1) = 1, F(2) = 3, F(3) = 4, F(5) = 5], [a, b, c,
         d, e])
```

Vereinfachen liefert:

#4: $\left[a = \frac{1}{12} \wedge b = -\frac{5}{6} \wedge c = \frac{29}{12} \wedge d = -\frac{2}{3} \wedge e = 0\right]$

Einsetzen der Ergebnisse in F(x) ergibt die Funktionsgleichung.

#5: $F(x) := \frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{5}{6}\cdot x^3 + \frac{29}{12}\cdot x^2 - \frac{2}{3}\cdot x$



2. Versuch: Spline-Interpolation

Die Krümmung des im ersten Versuch berechneten Stützstellenpolynoms war zu groß.

Der physikalischen Forderung nach minimaler Deformationsenergie entspricht mathematisch eine „minimale Krümmung“ des Graphen. Dies erreichen wir wenn wir den Graphen stückweise aus ganzrationalen Funktionsgraphen höchstens dritter Ordnung zusammensetzen.

Bei n+1 vorgegebenen Punkten $P_0(x_0|y_0)$, ... , $P_n(x_n|y_n)$ sind dies n ganzrationale Funktionen dritter Ordnung F_1, ... , F_n. Also müssen 4n Koeffizienten bestimmt werden. Für unsere Aufgabe sind diese Funktionen in #8 - #11 definiert.

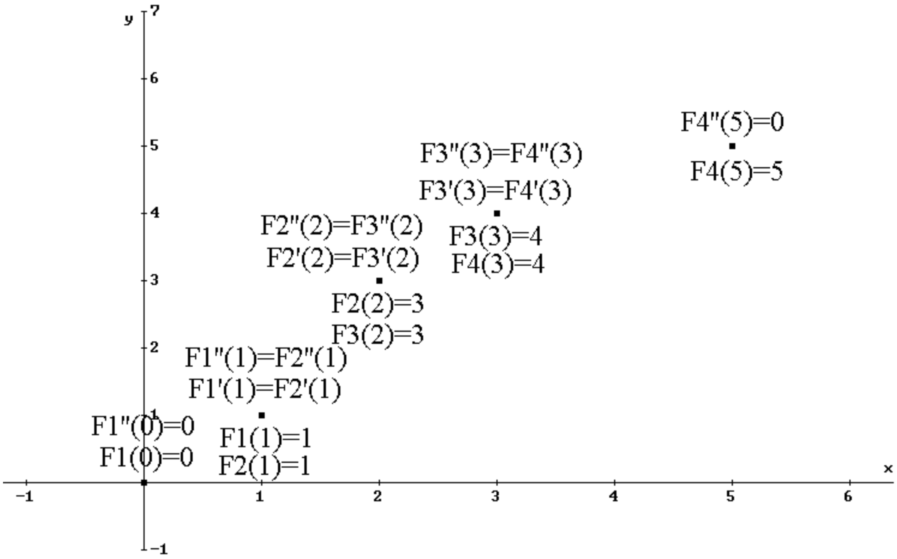
<u>Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten:</u>

Die Graphen dieser Funktionen sollen in den vorgegebenen Punkten nahtlos (also stetig) sowie ohne Knicke (also differenzierbar) und ohne Krümmungssprünge aneinander anschließen. Außerdem soll die Krümmung in den Randpunkten Null sein.

Aus diesen Bedingungen erhält man 4n Gleichungen:

$$F_i(x_{i-1}) = y_{i-1}; F_i(x_i) = y_i \text{ für } i = 1,..,n$$
$$F_i'(x_i) = F_{i+1}'(x_i); F_i''(x_i) = F_{i+1}''(x_i) \text{ für } i = 1,..,n-1$$
$$F_1''(x_0) = 0; F_n''(x_n) = 0$$

Für unsere Aufgabe sind also die 16 Koeffizienten zu bestimmen. Die dazu erforderlichen Gleichungen ergeben sich aus den folgenden Bedingungen (#12, .. , # 15):



Arbeite das DERIVE-Protokoll durch und zeichne die vorgegebenen Punkte und die Graphen der Polynome. Vergleiche mit dem Graphen des Stützstellenpolynoms.

#6: InputMode := Word

Die erste Gleichung geben wir von Hand ein, die übrigen ändern wir mit [F3] ab.

#7: $F1(x) := a1\cdot x^3 + b1\cdot x^2 + c1\cdot x + d1$

#8: $F2(x) := a2\cdot x^3 + b2\cdot x^2 + c2\cdot x + d2$

#9: $F3(x) := a3\cdot x^3 + b3\cdot x^2 + c3\cdot x + d3$

#10: $F4(x) := a4\cdot x^3 + b4\cdot x^2 + c4\cdot x + d4$

Nun sind 16 Unbekannte zu bestimmen!
Die Graphen der einzelnen Funktionen sollen an ihren Rändern durch die vorgegebenen Punkte verlaufen (8 Bedingungen):

#11: $[F1(0) = 0,\ F1(1) = 1,\ F2(1) = 1,\ F2(2) = 3,\ F3(2) = 3,\ F3(3) = 4,\ F4(3) = 4,\ F4(5) = 5]$

In den inneren Punkten sollen die Graphen ohne Knick aneinander anschließen (3 Bedingungen):

#12: $[F1'(1) = F2'(1),\ F2'(2) = F3'(2),\ F3'(3) = F4'(3)]$

In den inneren Punkten sollen die Graphen ohne Krümmungssprung aneinander anschließen (3 Bedingungen):

#13: $[F1''(1) = F2''(1),\ F2''(2) = F3''(2),\ F3''(3) = F4''(3)]$

An den beiden Rändern soll die Krümmung Null sein (2Bedingungen):

#14: $[F1''(0) = 0,\ F4''(5) = 0]$

Setze alle Bedingungen zu einem Gleichungssystem zusammen !

#15: SOLVE([F1(0) = 0, F1(1) = 1, F2(1) = 1, F2(2) = 3, F3(2) = 3, F3(3) = 4, F4(3) = 4, F4(5) = 5, F1'(1) = F2'(1), F2'(2) = F3'(2), F3'(3) = F4'(3), F1''(1) = F2''(1), F2''(2) = F3''(2), F3''(3) = F4''(3), F1''(0) = 0, F4''(5) = 0], [a1, a2, d4, a3, a4, b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4, d1, d2, d3, d4])

Vereinfache!

#16: $$\left[a1 = \frac{57}{172} \wedge a2 = -\frac{113}{172} \wedge a3 = \frac{51}{172} \wedge a4 = \frac{5}{344} \wedge b1 = 0 \wedge b2 = \frac{255}{86} \wedge b3 = -\frac{237}{86} \wedge b4 = -\frac{75}{344} \wedge c1 = \frac{115}{172} \wedge c2 = -\frac{395}{172} \wedge c3 = \frac{1573}{172} \wedge c4 = \frac{527}{344} \wedge d1 = 0 \wedge d2 = \frac{85}{86} \wedge d3 = -\frac{571}{86} \wedge d4 = \frac{335}{344}\right]$$

Einsetzen in F1(x), F2(x), F3(x), F4(x)!

#17: $$F1(x) := \frac{57}{172}\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + \frac{115}{172}\cdot x + 0$$

#18: $$F2(x) := \left(-\frac{113}{172}\right)\cdot x^3 + \frac{255}{86}\cdot x^2 + \left(-\frac{395}{172}\right)\cdot x + \frac{85}{86}$$

#19: $$F3(x) := \frac{51}{172}\cdot x^3 + \left(-\frac{237}{86}\right)\cdot x^2 + \frac{1573}{172}\cdot x + -\frac{571}{86}$$

#20: $$F4(x) := \frac{5}{344}\cdot x^3 + \left(-\frac{75}{344}\right)\cdot x^2 + \frac{527}{344}\cdot x + \frac{335}{344}$$

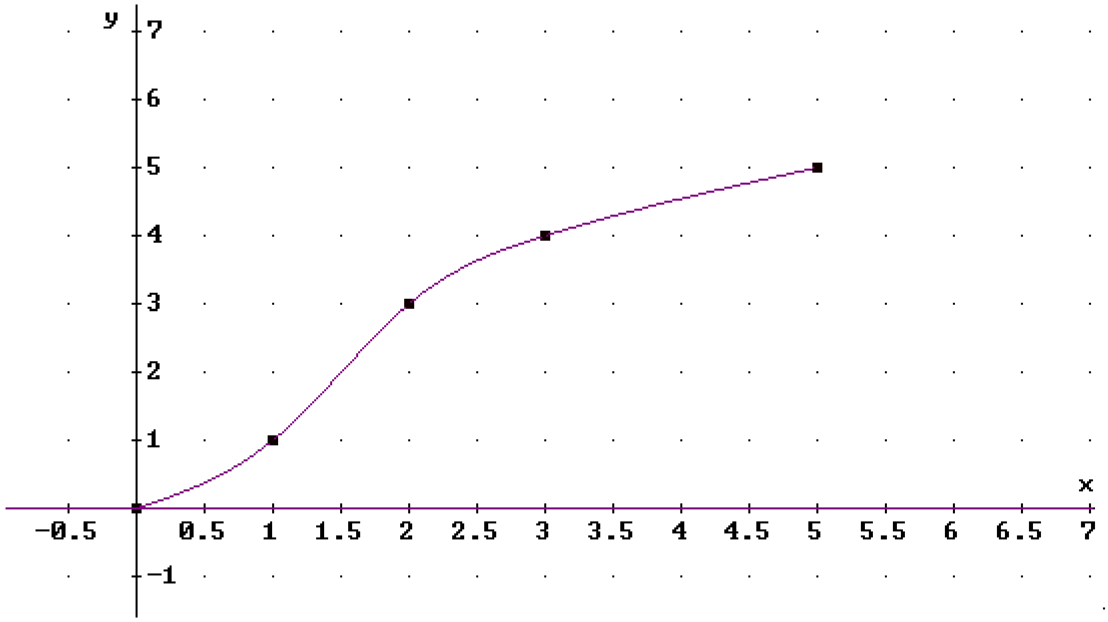
Zum abschnittweisen Zeichnen: Indikatorfunktion CHI(a,x,b)=1 für a<x<b und CHI(a,x,b)=0 für x<a und x>b

#21: F1(x)·CHI(0, x, 1)

#22: F2(x)·CHI(1, x, 2)

#23: F3(x)·CHI(2, x, 3)

#24: F4(x)·CHI(3, x, 5)



Geschafft!!

–

Aufgabe:
Bestimme ebenso das Stützstellenpolynom und den Spline durch die Punkte $P_0(0|0)$, $P_1(1|1)$, $P_2(2|5)$, $P_3(4|5)$, $P_4(5|4)$. Zeichne ihre Graphen.