

Die Monte-Carlo-Methode

Näherungsweise Integration durch Würfeln

Oft ist es nicht möglich eine Integration durchzuführen, da zu einem Integranden keine Stammfunktion bestimmt werden kann.

In diesem Arbeitsblatt wird eine Technik entwickelt, mit Hilfe von Zufallszahlen Näherungswerte für bestimmte Integrale zu berechnen.

Die Funktion f mit $f(x)=x^2$ kann leicht über dem Intervall $[0;1]$ integriert werden. Wir starten unsere Versuche mit dieser Funktion, da wir anschließend die Näherungsergebnisse mit dem exakten Wert vergleichen können.

```
#1: F(x) := x2
```

Mit DERIVE können Zufallszahlen mit $\text{RANDOM}(a)$ ermittelt werden.

$\text{RANDOM}(1)$ ergibt eine reelle Zufallszahl aus dem Intervall $(0; 1)$.

Nun würfeln wir 1000 mal Punkte mit den Koordinaten $[x, y] = [\text{RANDOM}(1), \text{RANDOM}(1)]$.

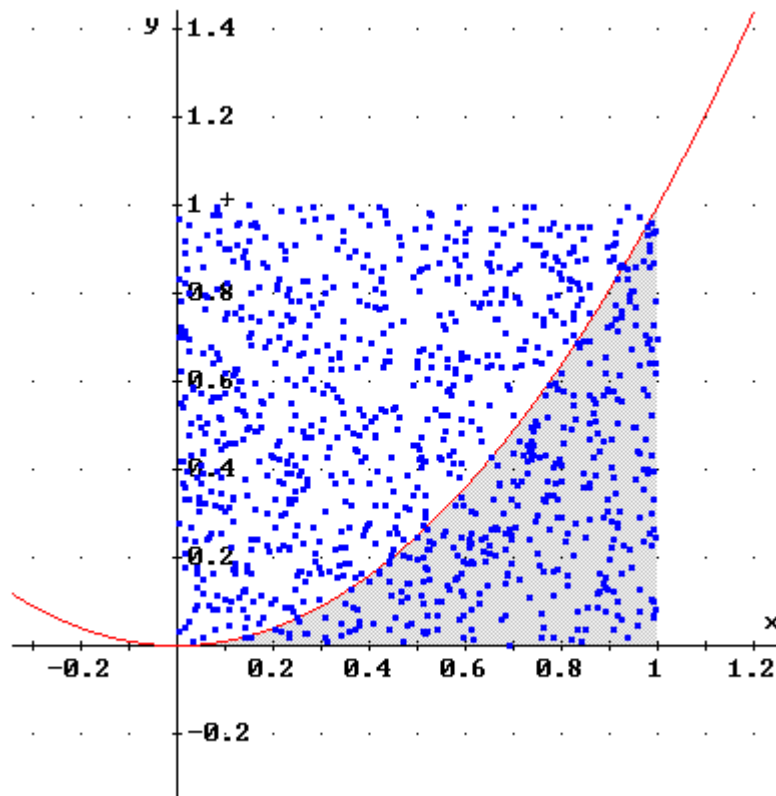
Die x - und y -Koordinaten werden also zufällig ermittelt.

Das Ergebnis kann graphisch dargestellt werden.

```
#2: VECTOR([RANDOM(1), RANDOM(1)], i, 1, 1000)
```

Zur Schraffierung der Fläche zwischen Graph und x -Achse:

```
#3: 0 < x < 1 ^ 0 < y < F(x)
```



Die Funktion unterkurve testet, ob ein Punkt unterhalb oder oberhalb des Graphen von f liegt. Im ersten Fall ergibt Unterkurve eine 1 sonst eine 0.

```
#4: unterkurve := IF(F(RANDOM(1)) > RANDOM(1), 1, 0)
```

Nun zählen wir wie viele Punkte unter dem Graphen von f liegen.

```
#5: Z(n) :=  $\sum_{i=1}^n$  unterkurve
```

```
#6: Z(100) = 29
```

Bei 100 Versuchen lagen hier 29 Punkte unterhalb des Graphen von f. Bei einem neuen Versuch können wir hier natürlich einen anderen Wert erhalten.

Der Flächeninhalt des Quadrates, in dem die Punkte lagen, ist gleich 1.

Also gibt die relative Häufigkeit der Punkte unterhalb des Graphen einen Näherungswert für das Integral an.

```
#7: P(n) :=  $\frac{Z(n)}{n}$ 
```

```
#8: P(1000)
```

```
#9: 0.348
```

Zum Vergleich:

```
#10:  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ 
```

Ergänzung:

Noch genauer geht es mit den folgenden Vorgehen:

Zuerst wird das Ergebnis (0 oder 1) des "Unterkurve-Tests" zu der bereits erzielten Anzahl addiert.

```
#11: V(n) := ITERATES(s + unterkurve, s, 0, n)
```

Dies wird nun 500 mal durchgeführt und das Ergebnis als "unterkurve" festgehalten.

```
#12: V(500)
```

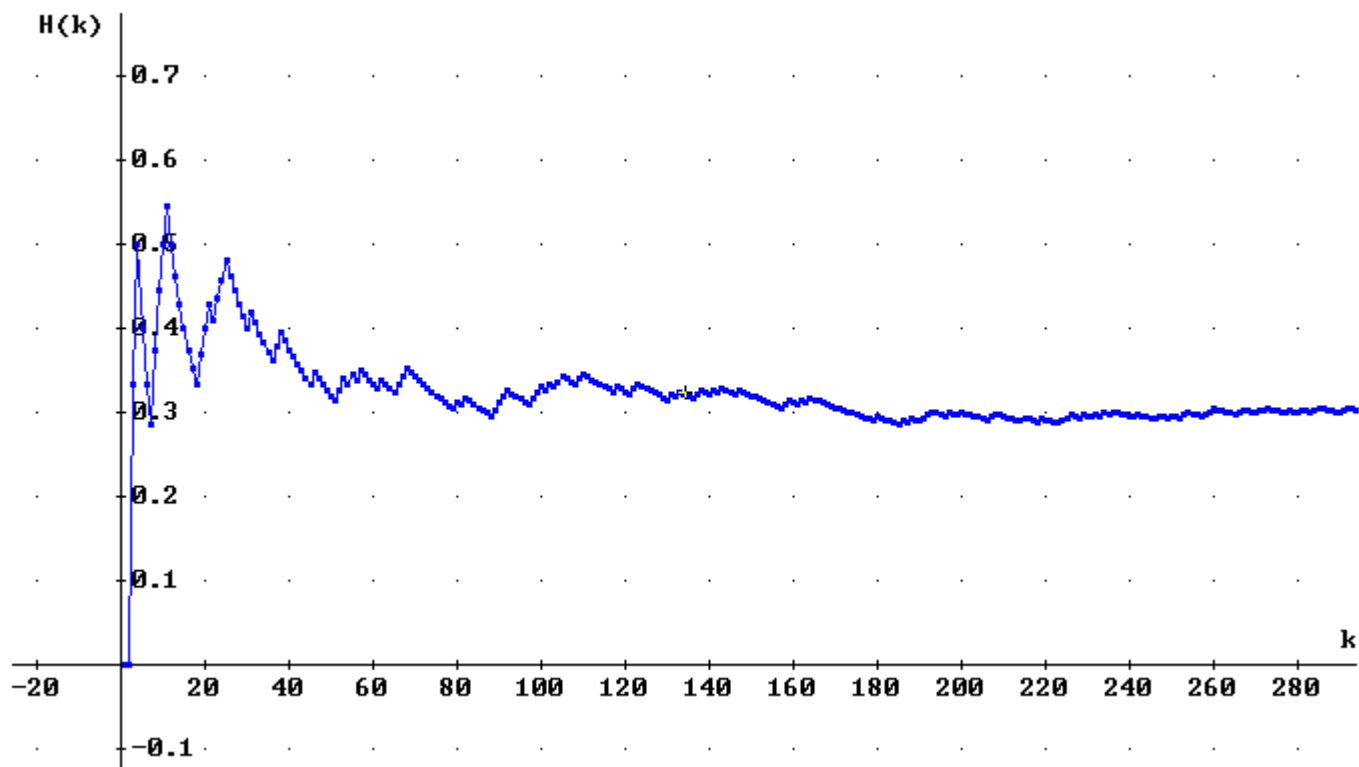
```
#13: unterkurveliste := [0, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6,
6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13,
13, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16,
16, 17, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 21, 21, 21, 22,
23, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 24, 25, 25, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 27, 28, 29, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 31,
32, 33, 33, 34, 34, 35, 36, 36, 36, 36, 37, 38, 38, 38, 38, 38,
38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41,
42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 47, 47,
48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 49, 50, 50, 50, 51,
51, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52,
```

52, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 54, 54, 55, 55, 55, 56, 57, 58, 58,
58, 58, 59, 59, 59, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 61, 62, 62, 62,
62, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 63, 64, 64, 64, 64, 64, 65, 66, 67,
67, 67, 68, 68, 68, 69, 69, 70, 70, 71, 71, 71, 71, 71, 71, 72,
72, 72, 72, 72, 73, 73, 73, 74, 74, 74, 75, 76, 76, 76, 76, 77,
78, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 80, 81, 81, 81, 81, 82, 82, 83, 83,
83, 83, 83, 84, 84, 84, 85, 85, 85, 86, 87, 87, 87, 87, 87, 87,
88, 89, 89, 89, 89, 89, 89, 89, 90, 90, 91, 91, 92, 92, 92, 92,
92, 93, 94, 94, 94, 95, 96, 96, 96, 97, 97, 97, 97, 97, 97, 98,
98, 98, 98, 99, 99, 99, 99, 100, 101, 102, 102, 103, 104, 105,
105, 105, 105, 106, 106, 107, 108, 108, 108, 108, 108, 108, 108,
108, 109, 110, 110, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 112,
112, 112, 112, 112, 113, 113, 113, 114, 114, 115, 115, 115, 116,
116, 116, 116, 116, 116, 117, 118, 119, 120, 120, 120, 120,
120, 120, 120, 120, 121, 121, 122, 122, 123, 123, 123, 123, 124,
124, 124, 124, 124, 124, 124, 125, 126, 126, 127, 127, 128, 128,
128, 129, 130, 131, 131, 132, 133, 134, 134, 134, 134, 135, 136,
137, 138, 139, 139, 140, 140, 140, 140, 141, 142, 142, 143, 143,
143, 143, 144, 145, 146, 147, 147, 147, 148, 149, 150, 151, 151,
152, 152, 152, 152, 152, 152, 152, 153, 153, 153, 153, 154, 154,
154, 155, 155, 155, 155, 156, 157, 157, 157, 157, 158, 158, 158,
158, 159, 159, 160, 161, 161, 161, 162, 162, 162, 162, 163, 163,
164, 164, 165, 165, 165, 166, 166, 166, 166]

Die nach dem k-ten Wurf erzielte relative Häufigkeit kann mit einem vector-Befehl berechnet und graphisch dargestellt werden.

$$\#14: \quad H(k) := \frac{\text{ELEMENT}(\text{unterkurveliste}, k)}{k}$$

#15: VECTOR([k, H(k)], k, 1, 500)



Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist hier deutlich zu erkennen.
Die Näherung für den gesuchten Flächeninhalt erhalten wir mit:

#16: $H(500) = 0.332$

Aufgabe

Ermittle mit der Monte-Carlo-Methode einen Näherungswert für die folgenden Integrale:

#17: $\int_0^1 \text{SIN}(x) \, dx$

#18: $\int_0^{\pi} \text{SIN}(x) \, dx$