

Die Monte-Carlo-Methode - Lösung

Näherungsweise Integration durch Würfeln

Aufgabe

Ermittle mit der Monte-Carlo-Methode einen Näherungswert für die folgenden Integrale:

#1:
$$\int_0^1 \text{SIN}(x) \, dx$$

#2:
$$\int_0^{\pi} \text{SIN}(x) \, dx$$

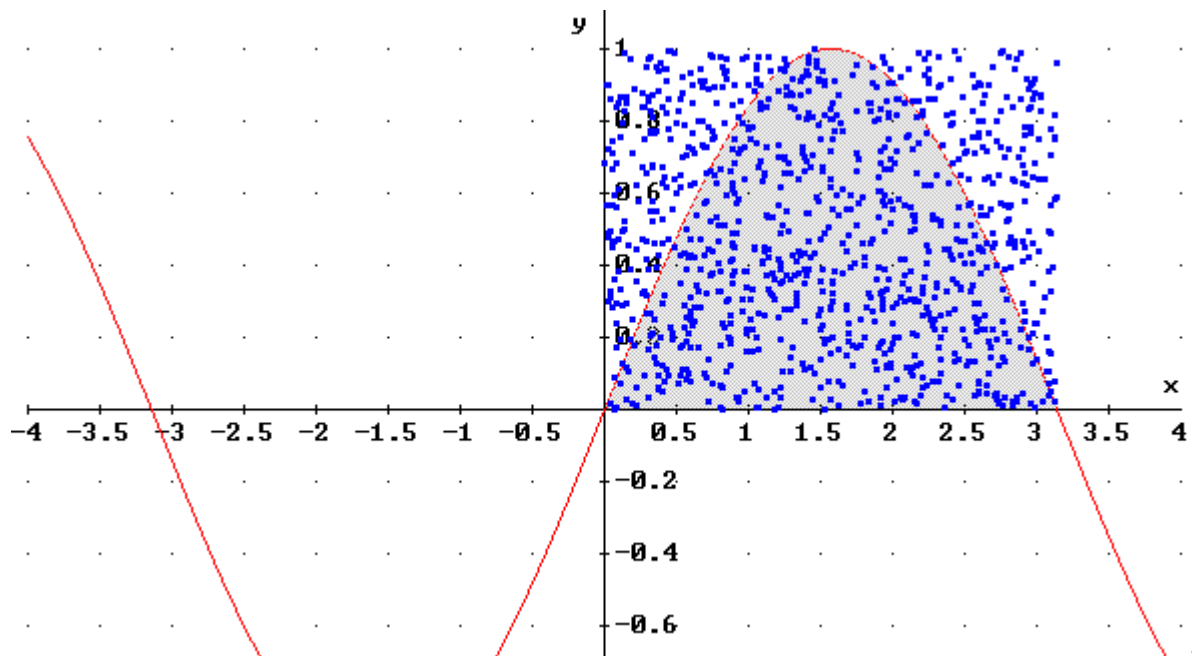
Lösung für das zweite Integral:

#3: $F(x) := \text{SIN}(x)$

Die x-Koordinate wird mit dem Faktor π gestreckt:

#4: `VECTOR([$\pi \cdot \text{RANDOM}(1)$], RANDOM(1)), i, 1, 1000)`

#5: $0 < x < \pi \wedge 0 < y < F(x)$



#6: `unterkurve := IF($F(\pi \cdot \text{RANDOM}(1)) > \text{RANDOM}(1)$), 1, 0)`

#7: $Z(n) := \sum_{i=1}^n \text{unterkurve}$

#8: $Z(100) = 60$

#9: $P(n) := \frac{\pi \cdot Z(n)}{n}$

#10: $P(1000)$

Durch Aproximieren erhalt man die folgenden Näherungswerte:

#11: 1.97920337

#12: 2.007477705

#13: 2.026327261

Zum Vergleich:

#14: $\int_0^{\pi} \text{SIN}(x) \, dx = 2$

Zur Ergänzung:

#15: $V(n) := \text{ITERATES}(s + \text{unterkurve}, s, 0, n)$

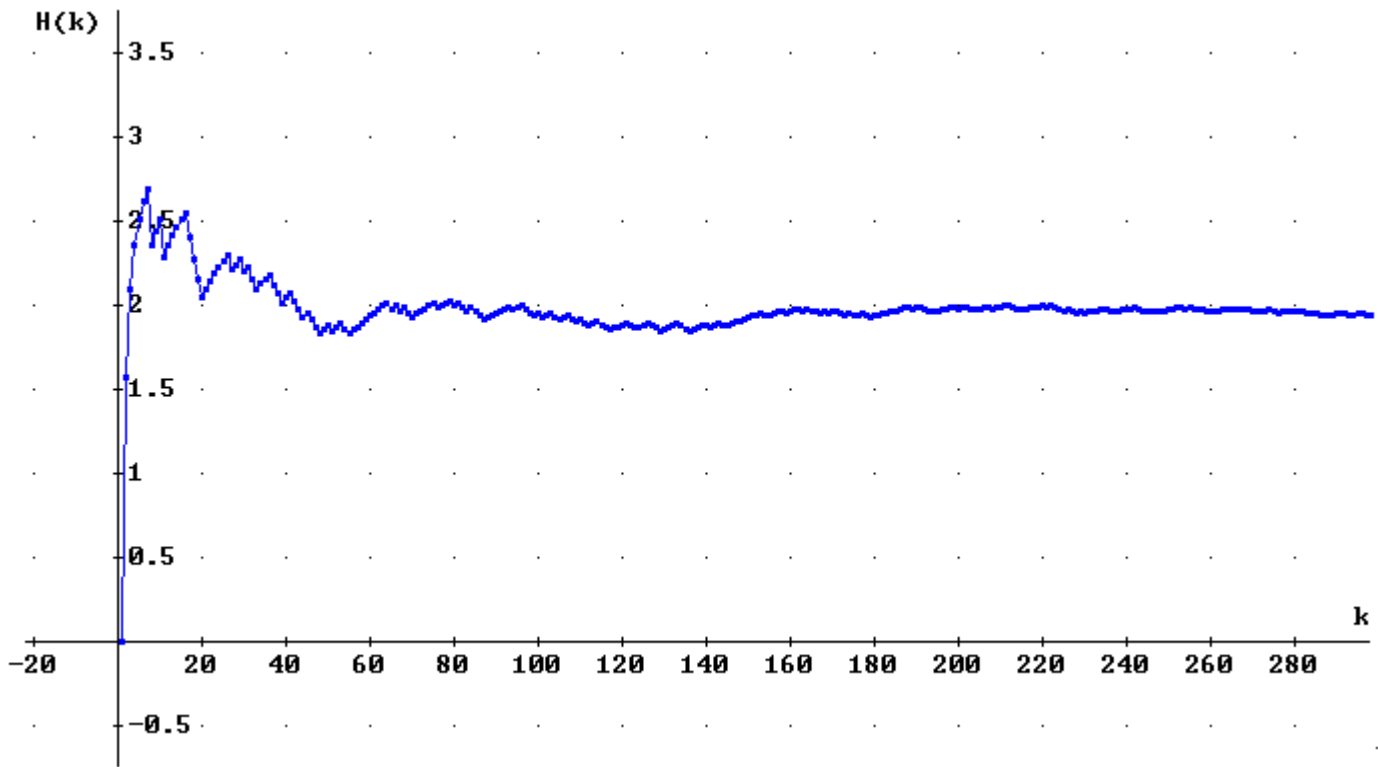
#16: $V(500)$

#17: unterkurveliste := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 22, 22, 23, 24, 25, 25, 25, 25, 26, 27, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 28, 29, 30, 30, 31, 32, 32, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 41, 42, 42, 43, 43, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 48, 49, 50, 51, 51, 52, 52, 52, 53, 53, 53, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 59, 60, 61, 61, 61, 61, 62, 62, 63, 64, 64, 64, 65, 66, 66, 66, 67, 67, 67, 68, 69, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 73, 73, 73, 74, 75, 76, 76, 76, 76, 77, 78, 79, 80, 80, 80, 80, 81, 82, 83, 84, 84, 85, 86, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 95, 96, 97, 98, 99, 99, 100, 101, 102, 102, 103, 103, 104, 104, 105, 105, 106, 107, 107, 107, 108, 108, 109, 110, 110, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 119, 120, 121, 121, 121, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 126, 127, 128, 128, 128, 129, 130, 131, 131, 132, 133, 134, 135, 135, 135, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 140, 141, 141, 141, 141, 142, 142, 142, 143, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 148, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 153, 153, 153, 154, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 160, 161, 161, 162, 162, 162, 163, 163, 164, 165,

166, 167, 167, 168, 169, 169, 169, 169, 170, 171, 172, 172, 172,
173, 174, 174, 175, 176, 176, 176, 177, 177, 177, 177, 178, 179,
180, 181, 181, 181, 182, 183, 184, 184, 184, 185, 185, 186, 187,
188, 188, 189, 190, 190, 191, 191, 191, 191, 191, 192, 193, 194,
195, 195, 195, 196, 197, 197, 197, 198, 198, 199, 199, 199, 200,
200, 201, 202, 202, 203, 204, 204, 204, 205, 206, 207, 208, 209,
210, 210, 211, 212, 213, 214, 214, 215, 215, 215, 216, 217, 218,
218, 218, 219, 220, 221, 221, 222, 223, 223, 224, 225, 225, 226,
226, 227, 228, 228, 228, 228, 229, 230, 230, 231, 232, 232, 233,
233, 234, 235, 236, 237, 237, 237, 237, 237, 238, 239, 239, 239,
239, 240, 241, 241, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 248,
249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 258, 259, 260,
260, 261, 262, 263, 264, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 270,
270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 276, 276, 277, 277, 278, 279,
280, 281, 282, 282, 282, 282, 283, 284, 284, 285, 285, 286, 287,
287, 288, 289, 290, 291, 292, 292, 293, 294, 294, 295, 296, 297,
297, 298, 298, 298, 299, 299, 300, 301, 302, 302, 302, 303, 303,
304, 305, 306, 307, 308, 309, 309, 309, 310, 310, 310, 310, 310,
311, 312, 312, 312]

$$\#18: H(k) := \frac{\text{ELEMENT}(\text{unterkurveliste}, k)}{k} \cdot \pi$$

#19: VECTOR([k, H(k)], k, 1, 500)



#20: $H(500) = 1.960353815$