

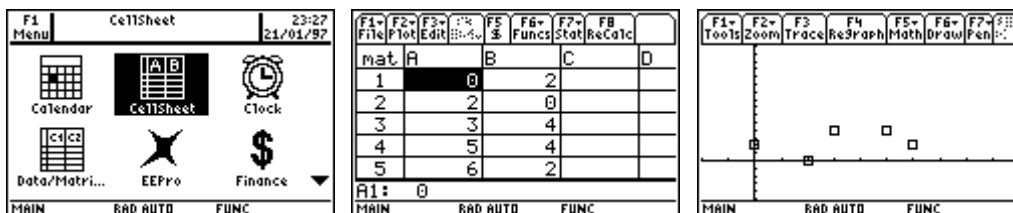
Aufgabe 1

Daniel / Tobias

Aufgabe: Stützstellenpolynom [Ti-89]

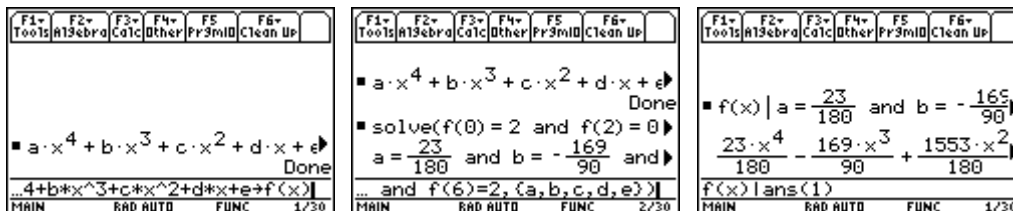
Bestimme eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, deren Graph durch die Punkte A(0/2), B(2/0), C(3/4), D(5/4) und E(6/2) verläuft.

- 1.) Zur Veranschaulichung zeichnen wir die Punkte in ein Koordinatensystem ein. Dazu verwenden wir die ‚Cellsheets‘-Funktion des Ti-89. Diese finden wir im Hauptmenü.



Über die Taste F2 gelangen wir in das Plot-Setup, wo wir die eingetragenen Punkte als Koordinaten definieren können. Drücken wir nun die Tasten ‚Raute‘ und ‚Graph‘ so können wir die Punkte im Koordinatensystem sehen.

- 2.) Wir stellen nun einen Funktionsterm auf. Wir haben 5 Bedingungen (Punkte), deshalb stellen wir eine Funktion 4. Grades in ‚Home‘ auf, weil es sicher ist, dass diese die Bedingungen erfüllt. Hierzu definieren wir f(x) wie folgt:



Anschließend geben wir in die Befehlszeile ein:

$\text{solve}(f(0)=2 \text{ and } f(2)=0 \text{ and } f(3)=4 \text{ and } f(5)=4 \text{ and } f(6)=2, \{a,b,c,d,e\})$

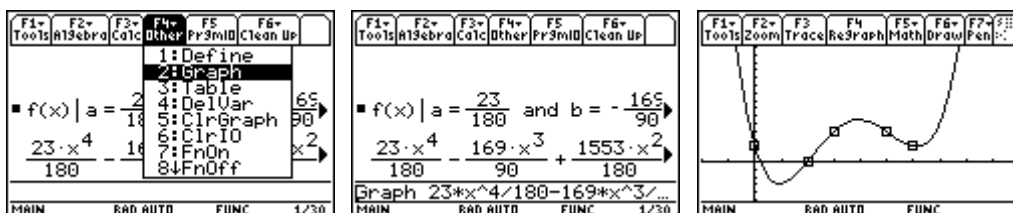
Wir erhalten als Ergebnisse:

$a = 23/180$ and $b = -169/90$ and $c = 1553/180$ and $d = -353/30$ and $e = 2$

Diese Ergebnisse setzen wir in f(x) ein. Wir erhalten nun die Funktion:

$$f(x) = \frac{23}{180}x^4 - \frac{169}{90}x^3 + \frac{1553}{180}x^2 - \frac{353}{30}x + 2$$

- 3.) Wir zeichnen den Graphen mit der ‚Graph‘-Funktion im F4-Menü.



Wie wir sehen verläuft der Graph durch unsere angegebenen Punkte.

Anmerkung

Die Anordnung der Punkte ließ uns zuerst auf eine Funktion 3. Grades schließen, doch die Annahme erwies sich als falsch.

Aufgabe 2

Robin / Georg

FUNKTIONEN:

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

$$g(x) = k x^3 + l x^2 + m x + n$$

$$h(x) = o x^3 + p x^2 + q x + r$$

1. Ableitung:

$$f'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$$

$$g'(x) = 3 k x^2 + 2 l x + m$$

$$h'(x) = 3 o x^2 + 2 p x + q$$

2. Ableitung:

$$f''(x) = 6 a x + 2 b$$

$$g''(x) = 6 k x + 2 l$$

$$h''(x) = 6 o x + 2 p$$

BEDINGUNGEN:

12 Bedingungen müssen erstellt werden, für die 12 Variablen...

$f(0) = 0$	Punkt wird eingesetzt
$f(3,5) = 2,2$	Punkt wird eingesetzt
$f'(3,5) = g'(3,5)$	Steigung beider Gleichungen muss gleich sein
$f''(3,5) = g''(3,5)$	Krümmung beider Gleichungen muss gleich sein
$g(3,5) = 2,2$	Punkt wird eingesetzt
$g(7,8) = 1,1$	Punkt wird eingesetzt
$g'(7,8) = h'(7,8)$	Steigung beider Gleichungen muss gleich sein
$g''(7,8) = h''(7,8)$	Krümmung beider Gleichungen muss gleich sein
$h(7,8) = 1,1$	Punkt wird eingesetzt
$h(10,5) = 2,1$	Punkt wird eingesetzt
$f''(0) = 0$	Krümmung muss nach Abschluss an der Stelle gleich 0 sein, da sie nicht weiter verbogen werden kann
$h''(10,5) = 0$	Krümmung muss nach Abschluss an der Stelle gleich 0 sein, da sie nicht weiter verbogen werden kann

TI-89:

- Funktionen definieren
- Ableitungen definieren
- a,b,c,k,l,n,m,o,p,q durch Funktionen und Bedingungen ausrechnen

Einzutippen nach Definition der Funktionen und Ableitungen in den TI-89:

Solve($f(0) = 0$ and $f(3,5) = 2,2$ and $f'(3,5) = g'(3,5)$ and $f''(3,5) = g''(3,5)$ and $g(3,5) = 2,2$ and $g(7,8) = 1,1$ and $g'(7,8) = h'(7,8)$ and $g''(7,8) = h''(7,8)$ and $h(7,8) = 1,1$ and $h(10,5) = 2,1$ and $f''(0) = 0$ and $h''(10,5) = 0$, {a,b,c,d,k,l,n,m,o,p,q,r }

Um die 3 Funktionen mit den Werten anzuzeigen, tippt man:

f(x)| ... [„...“ = werte die errechnet wurden]
g(x)| ... [„...“ = werte die errechnet wurden]
h(x)| ... [„...“ = werte die errechnet wurden]

//////////////////////////////////////Bilder stimmen nicht mehr mit der Aufgabe überein//////////////////////////////////////

ALLE FUNKTIONEN WENDEN ANGEZEIGT!!!

Hier sind die Einzelnen Schritte auf dem TI-89 noch einmal angezeigt.

F1+ Tools	F2+ Algebra	F3+ Calc	F4+ Other	F5 Pr3Mid	F6+ Clean Up	
--------------	----------------	-------------	--------------	--------------	-----------------	--

- $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \rightarrow f(x)$ Done
- $\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow f1(x)$ Done
- $\frac{d^2}{dx^2}(f(x)) \rightarrow f2(x)$ Done

MAIN DEGAUTO FUNC 9/9

F1+ Tools	F2+ Algebra	F3+ Calc	F4+ Other	F5 Pr3Mid	F6+ Clean Up	
--------------	----------------	-------------	--------------	--------------	-----------------	--

- $k \cdot x^3 + l \cdot x^2 + m \cdot x + n \rightarrow g(x)$ Done
- $\frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow g1(x)$ Done
- $\frac{d^2}{dx^2}(g(x)) \rightarrow g2(x)$ Done

MAIN DEGAUTO FUNC 6/9

F1+ Tools	F2+ Algebra	F3+ Calc	F4+ Other	F5 Pr3Mid	F6+ Clean Up	
--------------	----------------	-------------	--------------	--------------	-----------------	--

- $r \cdot x^2 + s \cdot x + t \rightarrow h(x)$ Done
- $\frac{d}{dx}(h(x)) \rightarrow h1(x)$ Done
- $\frac{d^2}{dx^2}(h(x)) \rightarrow h2(x)$ Done

MAIN DEGAUTO FUNC 9/99

F1+ Tools	F2+ Algebra	F3+ Calc	F4+ Other	F5 Pr3Mid	F6+ Clean Up	
--------------	----------------	-------------	--------------	--------------	-----------------	--

- $\frac{d}{dx}(h(x)) \rightarrow h1(x)$ Done
- $\frac{d^2}{dx^2}(h(x)) \rightarrow h2(x)$ Done
- **Solve(f(0) = 0 and f(3.5) =**
 $r = .1573779725$ and $s = -2$
 $\dots 1, (a, b, c, k, l, m, n, r, s, t)$

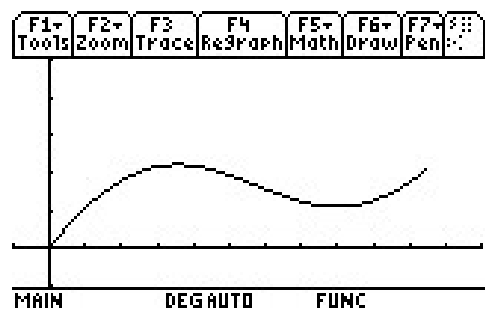
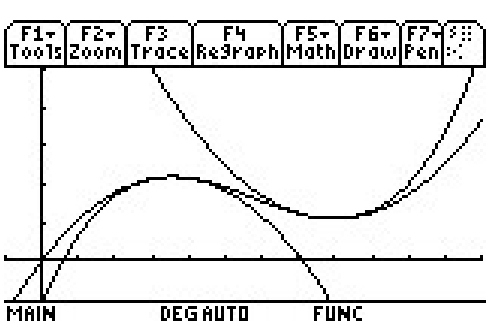
MAIN DEGAUTO FUNC 1/10

F1+ Tools	F2+ Zoom	F3+ Edit	F4+ ✓	F5+ All	F6+ Style	F7+ Func..	
--------------	-------------	-------------	----------	------------	--------------	---------------	--

*PLOTS

- ✓ $y1 = 1.2387591248121 \cdot x - .17$
- ✓ $y2 = .025714520489342 \cdot x^3 -$
- ✓ $y3 = .15737797252941 \cdot x^2 - 2$
- y4 =
- y5 =
- y6 =
- y6(x) =

MAIN DEGAUTO FUNC



////////////////////////////////////Bilder stimmen nicht mehr mit der Aufgabe überein////////////////////////////////////

Aufgabe 2b)

Funktion:
 $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

- Punkte:
- (0|0)
 - (3,5|2,2)
 - (5,3|1,8)
 - (10,5|2,1)

TI-89:

-Funktion definieren

- a,b,c,d durch Funktionen und Bedingungen ausrechnen

Einzutippen nach Definition der Funktionen in den TI-89:

Solve($f(0)=0$ and $f(3,5)=2,2$ and $f(5,3)=1,8$ and $f(10,5)=2,1$,{a,b,c,d})

Werte werden angezeigt:

a= $\frac{11605}{607698}$ b= $\frac{99838}{303849}$ c= $\frac{893987}{578760}$ d=0

Einzutippen nach errechnen der Werte mit dem TI-89:

f(x) | a= $\frac{11605}{607698}$ b= $\frac{99838}{303849}$ c= $\frac{893987}{578760}$ d=0

Funktion 3. Grades, die durch alle 4 Punkte geht, wird angezeigt.

Beide Funktionen ähneln sich, und gehen durch die 4 Punkte. Auf den ersten Blick könnten die Funktionen gleich sein.

Aufgabe 3abc

Caterina / Nikola

3.a)

allgemeine Funktionsgleichungen:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x)=3ax^2+bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b$$

Bedingungen:

$$f(1)=4$$

$$f'(1)=0$$

$$f(0)=2$$

$$f''(0)=0$$

einsetzen in Funktionsgleichungen:

$$\text{I. } 4=a+b+c+d \quad / \quad \text{II-I}$$

$$\text{II. } 0=3a+2b+c$$

$$\text{III. } 2=d$$

$$\text{IV. } 0=2b$$

$$\text{II-I. } -4=2a-2$$

$$\text{II. } 0=3a+c$$

$$\text{III. } 2=d$$

$$\text{IV. } 0=b$$

$$a=-1$$

$$0=3 \cdot (-1)+c$$

$$d=2$$

$$b=0$$

$$a=-1$$

$$c=3$$

$$d=2$$

$$b=0$$

$$\square f(x)=-x^3+3x+2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$f''(x) = -6x$$

$$f'''(x) = -6$$

(1/4) soll Extrempunkt sein

hinreichenden Bedingungen für Extrempunkt:

$f'(x) = 0$ und $f''(x)$ ungleich 0 wo ist das Zeichen für „ungleich“?

$$f'(1) = -3 \cdot (-1)^2 = 0$$

$$f''(1) = -6 \cdot 1 = -6 \text{ ist ungleich } 0$$

(0/2) soll Wendepunkt sein

hinreichende Bedingungen für Wendepunkt:

$f''(x) = 0$ und $f'''(x)$ ungleich 0

$$f''(0) = -6 \cdot 0 = 0$$

$$f'''(0) = -6 \text{ ist ungleich } 0$$

b)

allgemeine Funktionsgleichungen:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Bedingungen:

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = -2$$

$$f'(1) = 2$$

$$f''(1) = 0$$

einsetzen in Funktionsgleichungen:

$$\text{I. } 0 = d$$

$$\text{II. } -2 = a + b + c + d$$

$$\text{III. } 2 = 3a + 2b + c \text{ /III-II da ich keine Pfeile von einer Gleichung}$$

$$\text{IV. } 0 = 6a + 2b \text{ /:2 zur nächsten machen konnte, habe ich}$$

_____ sie durchnummeriert

$$\text{I. } 0 = d$$

$$\text{II. } -2 = a + b + c$$

$$\text{III-II. } 4 = 2a + b$$

$$\text{IV. } 0 = 3a + b \text{ /IV-(III-II)}$$

$$\text{_____}$$

$$d = 0$$

$$-2 = a + b + c$$

$$4 = 2a + b$$

$$-4 = a$$

$$\text{_____}$$

$$d = 0$$

$$-2 = -4 + b + c$$

$$4 = 2 \cdot (-4) + b$$

$$-4 = a$$

$$\text{_____}$$

$$d = 0$$

$$-2 = -4 + b + c$$

kleine Frage zwischendurch: muss man wirklich alle Gleichungen unverändert mitführen bzw immer wieder aufschreiben, auch wenn man nur eine einzelne Variable ausrechnet? **Antwort des Mathelehrers: Ja!**

$$b=12$$
$$a=-4$$

$$d=0$$
$$c=-10$$
$$b=12$$
$$a=-4$$

$$f(x)=-4x^3+12x^2-10x$$

$$f'(x)=-12x^2+24x-10$$
$$f''(x)=-24x+24$$
$$f'''(x)=-24$$

(1/-2) soll Wendepunkt sein

hinreichende Bedingungen für Wendepunkt:

$$f''(x)=0 \text{ und } f'''(x) \text{ ungleich } 0$$

$$f''(1)=-24 \cdot 1 + 24 = 0$$
$$f'''(1)=-24 \text{ ist ungleich } 0$$

c)

allgemeine Funktionsgleichungen:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$
$$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$$

Bedingungen:

$$f(0)=0$$
$$f(-2)=2$$
$$f'(0)=0$$
$$f'(-2)=0$$
$$f''(-2)=0$$

einsetzen in Funktionsgleichungen:

$$\text{I. } 0=e$$
$$\text{II. } 2=16a-8b+4c-2d \quad \text{II}+\text{IV}$$
$$\text{III. } 0=d$$
$$\text{IV. } 0=-32a+12b-4c+d$$
$$\text{V. } 0=48a-12b+2c$$

$$\text{I. } 0=e$$
$$\text{II. } 2=16a-8b+4c \quad /:2$$
$$\text{III. } 0=d$$
$$\text{II}+\text{IV. } 2=-16a+4b$$
$$\text{V. } 0=48a-12b+2c$$

$$\text{I. } 0=e$$
$$\text{II. } 1=8a-4b+2c \quad \text{V}-\text{II}$$
$$\text{III. } 0=d$$
$$\text{II}+\text{IV. } 2=-16a+4b$$
$$\text{V. } 0=48a-12b+2c$$

$$\text{I. } e=0$$
$$\text{II. } 1=8a-4b+2c$$

$$\begin{aligned} \text{III. } d &= 0 \\ \text{II+IV. } 2 &= -16a + 4b \quad / : 2 \\ \text{V-II. } -1 &= 40a - 8b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I. } e &= 0 \\ \text{II. } 1 &= 8a - 4b + 2c \\ \text{III. } d &= 0 \\ \text{II+IV. } 4 &= -32a + 8b \quad / (\text{II+IV}) + (\text{V-II}) \\ \text{V-II. } -1 &= 40a - 8b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ 1 &= 8a - 4b + 2c \\ d &= 0 \\ 2 &= -16a + 4b \\ 3 &= 8a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ 1 &= 8 \cdot (3/8) - 4b + 2c \\ d &= 0 \\ 2 &= -16 \cdot (3/8) + 4b \\ a &= 3/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ 1 &= 3 - 4b + 2c \\ d &= 0 \\ b &= 2 \\ a &= 3/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ c &= 3 \\ d &= 0 \\ b &= 2 \\ a &= 3/8 \end{aligned}$$

$$\square f(x) = 3/8x^4 + 2x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 3/2x^3 + 6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 9/2x^2 + 12x + 6$$

$$f'''(x) = 9x + 12$$

$(-2/2)$ soll Wendepunkt sein

hinreichende Bedingungen für Wendepunkt:

$$f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \text{ ungleich } 0$$

$$f''(-2) = 9/2 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 6 = 0$$

$$f'''(-2) = 9 \cdot (-2) + 12 = -6 \text{ ist ungleich } 0$$

Aufgabe 3de

Verena / Anke

3d) Ein Metallstreifen ist im Punkt F eingespannt und liegt im Abstand von 10 cm im Punkt L lose auf. Infolge einer Belastung biegt sich der Metallstreifen so durch, dass die größte Durchbiegung $d=2$ cm im horizontalen Abstand von 7 cm von F auftritt. Beschreibe die Form des Metallstreifens durch eine ganzrationale Funktion.

Als Bedingungen ergeben sich:

$f(0)=0$	Sowohl Stelle als auch Funktionswert im Punkt F sind null, der Graph geht durch den Ursprung.
$f(10)=0$	Der Punkt L liegt 10 cm vom Punkt F entfernt, der Graph schneidet also die x-Achse an der Stelle $x=10$.
$f(7)=-2$	Im Abstand von 7 cm vom Punkt F tritt mit 2 cm nach unten die größte Durchbiegung auf, d.h. der Funktionswert an der Stelle 7 beträgt -2 .
$f'(7)=0$	An der Stelle 7 liegt ein Tiefpunkt vor, d.h. die Steigung an dieser Stelle ist 0.
$f'(0)=0$	Im Punkt F liegt der Graph gerade auf der x-Achse auf, d.h. die Steigung ist auch hier 0.
$f''(0)=0$	Im Punkt F liegt keine Krümmung vor, d.h. die 2. Ableitung ist 0.
$f''(10)=0$	Im Punkt L liegt ebenfalls keine Krümmung vor, deshalb ist auch hier die 2. Ableitung 0.

Daraus ergibt sich, dass wir eine Funktion 6. Grades suchen.

$$f(x)=ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+gx+h$$

Mit dem TI errechnen wir mit Hilfe des Solve-Befehls die Koeffizienten.

$$a=-50/1.879.983$$

$$b=284/626.661$$

$$c=40/626.661$$

$$d=-5200/268.569$$

$$e=0$$

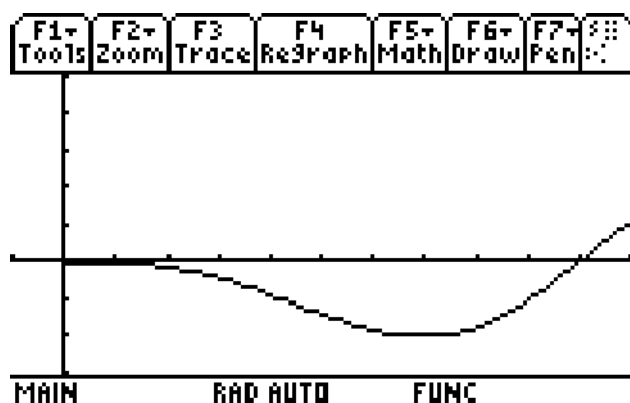
$$g=0$$

$$h=0$$

Daraus ergibt sich die folgende Funktion:

$$f(x)=-50/1.879.983x^6 + 284/626.661x^5 + 40/626.661x^4 - 5200/268.569x^3$$

Mit dem TI zeichnen wir den Graphen.



Zwischen den beiden Punkten verläuft der Graph wie gewünscht. Am rechten Rand verläuft der Graph allerdings nicht wie der Metallstreifen gerade nach rechts oben weg, sondern formt einen Hochpunkt.

3e) Bestimme die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion f , deren Graph den Übergangsbogen zwischen den beiden Halbgeraden bildet. Dabei soll f an den Übergangsstellen mit der ersten und der zweiten Ableitung der Halbgeraden übereinstimmen. Zeichne die Graphen mit dem TI89.

Als Bedingungen ergeben sich:

$f(0)=0$ $f(1)=1$	Gesucht wird eine ganzrationale Funktion f , deren Graph den Übergangsbogen zwischen den Halbgeraden bildet, d.h. die Funktionswerte an den Übergangsstellen müssen mit denen der Halbgeraden übereinstimmen.
$f'(0)=-1$ $f'(1)=0,5$	Der Graph soll an den Übergangsstellen in der 1. Ableitung mit den Halbgeraden überstimen. Die linke Halbgerade hat die Steigung -1 , d.h. der Graph muss an der Stelle 0 ebenfalls die Steigung -1 haben. Die rechte Halbgerade hat die Steigung $0,5$, d.h. der Graph muss an der Stelle 1 ebenfalls die Steigung $0,5$ haben. Man kann auch sagen: die linke Halbgerade hat die Gleichung $y(x)=-x$. Bildet man nun die Ableitung erhält man $y'(x)=-1$. Da die 1. Ableitung der Halbgeraden mit 1. Ableitung des Graphen übereinstimmen soll, ist f' an der Stelle 0 gleich -1 . Analog gilt für die rechte Halbgerade: $g(x)=0,5x+0,5$. Bildet man die 1. Ableitung erhält man $g'(x)=0,5$, d.h. f' an der Stelle 1 ist gleich $0,5$.
$f''(0)=0$ $f''(1)=0$	Der Graph soll an den Übergangsstellen auch in der 2. Ableitung mit den Halbgeraden übereinstimmen. Bildet man die 2. Ableitung der Halbgeraden erhält man $y''(x)=0$ bzw. $g''(x)=0$, d.h. die 2. Ableitung des Graphen ist sowohl an der Stelle 0 als auch an der Stelle 1 gleich 0.

Daraus ergibt sich, dass wir eine Funktion 5. Grades suchen.

$$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g$$

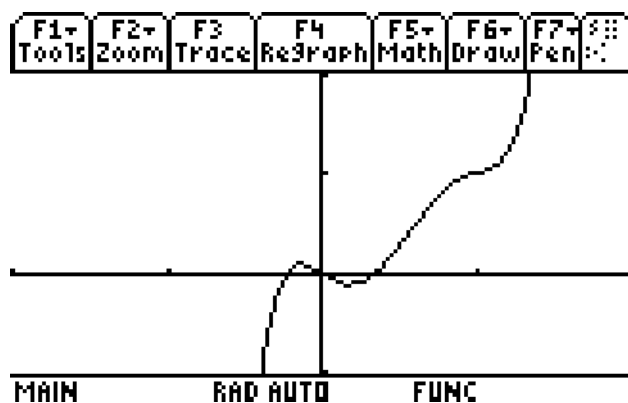
Mit dem TI errechnen wir mit Hilfe des Solve-Befehls die Koeffizienten.

$$\begin{aligned} a &= 7,5 \\ b &= -19,5 \\ c &= 14 \\ d &= 0 \\ e &= -1 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

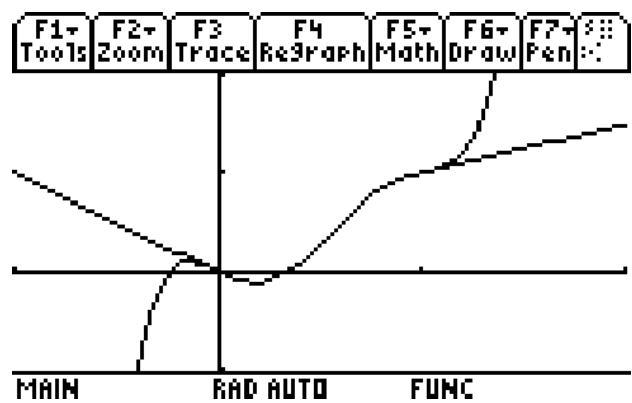
Daraus ergibt sich die folgende Funktion:

$$f(x)=7,5x^5 - 19,5x^4 + 14x^3 - x$$

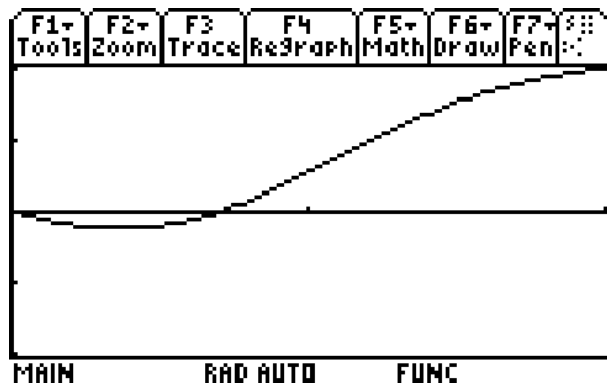
Mit dem TI zeichnen wir den Graphen.



Hier der vollständige Funktionsgraph von f .



Hier der Funktionsgraph von f mit den Halbgeraden.



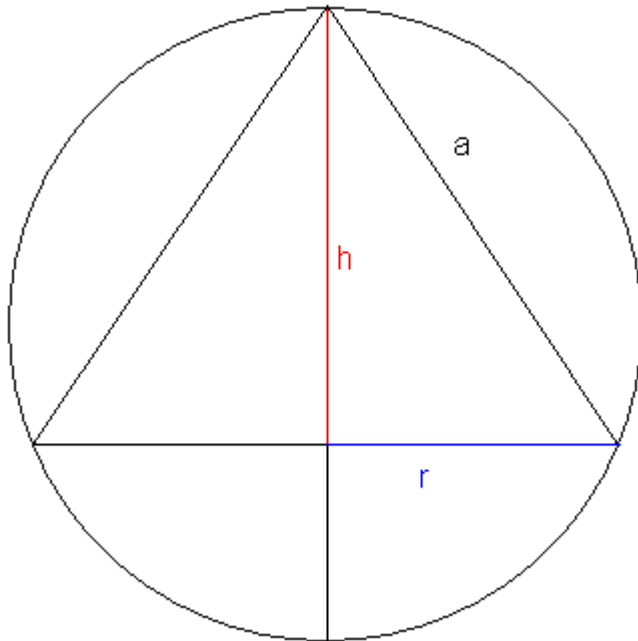
Hier sieht man nur den Graphen im gesuchten Ausschnitt.

Der Graph schließt an die Übergangsstellen an und bildet so einen Übergangsbogen zwischen den beiden Halbgeraden. Der Übergang ist kaum zu sehen, weil die 1. und 2. Ableitungen übereinstimmen.

Aufgabe 4

Lars / Florian

Aufgabe 4. a)



a = Seitenlänge

r = Radius vom Kegel

h = Höhe

R = gesamter Radius

Ich stelle die Gleichung auf, die man braucht um die Mantelfläche zu berechnen.

$$a \cdot r \cdot \pi = f(r)$$

$f(r)$ soll maximal sein.

Als nächstes stelle ich die Definitionsbereiche von r und h auf

$$D(r) = [0, R]$$

$$D(h) = [0, 2R]$$

Nun zeichne ich den Radius in den Kreis, so dass die Strecke vom Mittelpunkt bis zu dem Punkt, wo sich a und r schneiden geht.

Nun kann ich einen Teil von h mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen (die Wurzel aus $R^2 - r^2$ ist dieses Stück).

Der andere Teil von h ist R .

$$h = R + \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$h - R = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Insgesamt kann man auch noch diese Formel nach Pythagoras herleiten:

$$a^2 = h^2 + r^2$$

Nun rechnet man die erste Formel ein bisschen weiter aus:

$$h^2 - 2 \cdot h \cdot R + R^2 = R^2 - r^2 \quad | -R^2$$

$$h^2 - 2 \cdot h \cdot R = -r^2 \quad | \cdot (-1)$$

$$-h^2 + 2 \cdot h \cdot R = r^2$$

Jetzt setzt man die eine Gleichung in die andere ein und erhält:

$$a^2 = h^2 - h^2 + 2 \cdot h \cdot R$$

$$a^2 = 2 \cdot h \cdot R$$

$$a = \sqrt{2hR}$$

Dann setzt man $a = \sqrt{2hR}$ in die erste aufgestellte Formel ($a \cdot r \cdot \pi = f(h)$) ein und erhält:

$$\sqrt{2hR} \cdot r \cdot \pi = f(h)$$

Da diese Gleichung noch von r und h einsetzt, setzt man nun für $r = \sqrt{-h^2 + 2 \cdot h \cdot R}$ ein.

$$\sqrt{2hR} \cdot \sqrt{-h^2 + 2 \cdot h \cdot R} \cdot \pi = f(h)$$

$$\sqrt{-2h^3 \cdot R + 4 \cdot h^2 \cdot R^2} \cdot \pi = f(h)$$

Da die Wurzelfunktion streng monoton wachsend ist, reicht es den Radikanten $d(h) = -2h^3R + 4h^2R^2$ auf Extrema zu untersuchen.

Untersuchung der notwendigen Bedingung: $d'(h) = 0$ (Wir leiten nach h ab)

$$-6h^2R + 8hR^2 = 0 \quad | +6h^2R$$

$$6h^2R = 8hR^2 \quad | /R /h \quad (h \text{ und } R \text{ müssen ungleich } 0 \text{ sein})$$

$$6h = 8R \quad | \text{ Nun teilt man noch durch } 6 \text{ und erh\u00e4lt:}$$

$$h = \frac{4}{3}R$$

Um festzustellen ob es sich auch wirklich um einen Hochpunkt handelt setzt man $\frac{4}{3}R$ nun noch in die 2. Ableitung f\u00fcr h ein.

$$d'(h) = -6h^2R + 8hR^2$$

$$d''(h) = -12hR + 8R^2$$

$$\Rightarrow d''\left(\frac{4}{3}R\right) = -16R^2 + 8R^2 = -8R^2$$

Da die 2. Ableitung an der Stelle $h = \frac{4}{3}R$ negativ ist (R^2 ist immer positiv), liegt an der gefundenen Stelle ein Hochpunkt vor.

Also ist $h = \frac{4}{3}R$ wenn die Mantelfl\u00e4che maximal sein soll.

Aufgabe 4. b)

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist es, \u00c4hnlichkeiten zu finden, um so Verh\u00e4ltnisse zwischen den einzelnen Variablen aufstellen zu k\u00f6nnen, um schlie\u00dflich zu einer Zielfunktion zu gelangen. Als Ansatz nimmt man die Funktion, die den Rauminhalt des Quaders beschreibt:

$$f(x) = x^2 \cdot y, \text{ wobei } x \text{ die Grundseite und } y \text{ die H\u00f6he des Quaders ist.}$$

Mit Hilfe der Strahlens\u00e4tze l\u00e4sst sich eine \u00c4hnlichkeit finden, die das Verh\u00e4ltnis zwischen x und y darstellt:

$$\frac{0,5a}{h} = \frac{(0,5a - 0,5x)}{y}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(ah - xh)}{a}$$

Nun kann man dieses Ergebnis in unsere Anfangsfunktion einsetzen und wir erhalten unsere Zielfunktion $f(x) = x^2 \cdot \frac{(ah - xh)}{a} = \frac{-x^3h}{a} + x^2h$

Anschließend muss man noch die Ableitungen bestimmen, indem die Exponenten von x um eins verringert und gleichzeitig mit x multipliziert werden:

$$f'(x) = \frac{-3x^2h}{a} + 2xh = \frac{-hx \cdot (3x - 2a)}{a}$$

$$f''(x) = \frac{-6x}{a} + 2h = \frac{-2h \cdot (3x - a)}{a}$$

Hierbei m\u00fcssen sowohl a als auch h gr\u00f6\u00dfer als 0 sein und x muss zwischen 0 und a liegen:

$$D = [0; a]$$

Da man den maximalen Wert f\u00fcr x sucht, muss man mit Hilfe der Ableitungsfunktion die Extremstellen finden:

$$f'(x) = \frac{-hx \cdot (3x - 2a)}{a}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-hx \cdot (3x - 2a)}{a} = 0 \Leftrightarrow -3x^2h + 2ahx = 0 \Leftrightarrow 0 = -3x^2 + 2ax \Leftrightarrow 0 = x \cdot (-3x + 2a)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2a}{3}$$

Mit der hinreichenden Bedingung $f''(x) < 0$ sucht man nun nach Hochpunkten:

$$f''(x) < 0$$

$$f''(x) = \frac{-2h \cdot (3x - a)}{a}$$

$$f''(0) = 2h > 0$$

$$f''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2h < 0$$

Um auch wirklich von einem absoluten Maximum zu sprechen, muss man noch die R\u00e4nder des Definitionsbereichs von f untersuchen:

$\lim (r \rightarrow \infty) (-x^3h / a + x^2h) = -\infty$
 $\lim (r \rightarrow -\infty) (-x^3h / a + x^2h) = +\infty$, da aber gilt $D = [0; a]$ gibt es diesen Fall nicht.

Daher liegt an der Stelle $x = 2a / 3$ ein globales Maximum vor mit der y-Koordinate
 $y = (2a / 3)^2 * (ah - 2ha / 3) / a \Leftrightarrow y = 4a^2h / 27$

Daher hat der Quader die Maße $x = 2a / 3$ und $y = 4a^2h / 27$, um so das maximale Volumen
 $f(x) = (2a / 3)^2 * 4a^2h / 27 = 16a^4 * h / 243$ zu erreichen.

Aufgabe 4. c)

Schon durch die Aufgabenstellung ist klar, dass hierbei eine Extremwertfunktion aufgestellt werden muss, um so den kürzesten Abstand zwischen der Funktion $f(x) = 1/x$ bzw. $f_2(x) = 1/3 * (x^3 - 3x^2 + 5)$ und dem Ursprung zu ermitteln.
 Mit Hilfe des Satz des Pythagoras kann man zunächst versuchen, eine Funktion $A(x)$ zu bestimmen welche für jeden Punkt von $f(x)$ den Abstand zu $P(0 / 0)$ beschreibt.

Hierbei gilt:
 $A(x)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ wobei $P(x_1/y_1)$ also $x_1=0$ und $y_1=0$

Folglich gilt:

$$A(x) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

durch einsetzen von $y = 1/x$ erhalten wir unsere Zielfunktion

$$A(x) = (x^2 + (1/x)^2)^{1/2}.$$

Da bei dieser Funktion der gesamte Term unter einer Wurzel steht, reicht es aus, die Extremstellen der Radikantenfunktion $B(x) = x^2 + (1/x)^2$ zu bestimmen da die Wurzelfunktion für alle $x \geq 0$ streng monoton wachsend ist

Um den kürzesten Abstand zu ermitteln, sucht man nun die Tiefpunkte von $B(x)$ mit der notwendigen Bedingung $B'(x) = 0$.

$$2x - 2x^{-3} = 0 \Leftrightarrow x = x^{-3}$$

Man erhält als Extremstellen von $B(x)$ folglich $x = 1$ und $x = -1$

Um nun festzustellen, ob diese Extremstellen auch Stellen von Tiefpunkten sind, muss man beide Stellen auf die hinreichenden Bedingung $B'(x)=0$ und $B''(x)>0$ überprüfen:

$$\begin{aligned}
 B''(x) &= 2 + 6x^{-4} \\
 B''(1) &= 8 > 0 \\
 B''(-1) &= 8 > 0
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis unserer Rechnung ist folglich das sowohl an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ Tiefpunkte vorliegen. Mit Einsetzen dieser Werte in die Funktion $f(x)$ erhält man die y-Koordinaten und die beiden Punkte $T_1(1 / 1)$ und $T_2(-1 / -1)$ die beide den gleichen Abstand vom Ursprung haben und somit die gesuchten Punkte sind.

Den gleichen Weg kann man verwenden, um den zweiten Teil der Aufgabe mit $f_2(x) = 1/3 * (x^3 - 3x^2 + 5)$ zu lösen, wobei hierbei die Zielfunktion

$A(x) = (x^2 + (1/3 \cdot (x^3 - 3x^2 + 5))^2)^{1/2}$ lautet.

Hierbei reicht es wiederum die Radikantenfunktion auf Extrema zu untersuchen

Auch hierbei ermittelt man die Nullstellen der Ableitungsfunktion und erhält $x = 1 \vee x = 0 \vee x = -1$ als mögliche Extremstellen, die man durch die hinreichende Bedingung auf Stellen von Tiefpunkten überprüft:

$B''(x) > 0$

$B''(1) = 52/3 > 0$

$B''(0) = -14/3 < 0$

$B''(-1) = 4 > 0$

Hierbei ergeben sich die Punkte $T1(1 | 2^{1/2})$ und $T2(-1 | 10^{1/2}/3)$, wobei die y-Koordinate von $T2$ näher an der vom Ursprung liegt, so dass $T2$ der gesuchte Punkt ist.

Aufgabe 5a Karin / Melanie

Kurvendiskussion von der gegebenen Funktion f durch $f(x) = 1/9x^3 - 3x$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

Symmetrie: $f(x) = 1/9x^3 - 3x$

Da im Funktionsterm nur ungerade Exponenten auftreten, ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs:

Da $f(x) = 1/9x^3 - 3x$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

x- Achse: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 1/9x^3 - 3x = 0 \quad / \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 27x = 0 \quad / x \text{ ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 27) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -3 \cdot \sqrt{3} \approx -5,19615 \quad \vee \quad x = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5,19615$$

y- Achse: $f(0) = 0$

Ergebnisse: $S_x(0/0)$, $S_x(3 \cdot \sqrt{3}/0)$, $S_x(-3 \cdot \sqrt{3}/0)$

Ableitungen: $f'(x) = (x^2 : 3) - 3$

$$f''(x) = 2x : 3$$

$$f'''(x) = 2 : 3$$

Extrempunkte:

NB: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 : 3) - 3 = 0 \quad / \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \quad / + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

HB: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(-3) = -2 < 0$$

$$f''(3) = 2 > 0$$

Ergebnis: An der Stelle $x = 3$ liegt ein lok. Tiefpunkt vor und an der Stelle $x = -3$ liegt ein lok. Hochpunkt vor.

$$T(3/-6) \quad ; \quad H(-3/6)$$

Wendepunkte:

NB: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x : 3 = 0 \quad / : 2$$

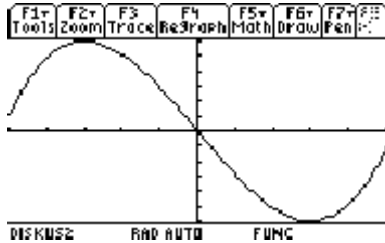
$$\Leftrightarrow x : 1,5 = 0 \quad / \cdot 1,5$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

HB: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
 $f'''(0) = 2/3 \neq 0$

Ergebnis: An der Stelle $x = 0$ liegt ein Wendepunkt vor.
 $W(0/0)$

Zeichnung des Graphen zu $f(x) = 1/9x^3 - 3x$:



Aufgabe 5b

Kurvendiskussion von der gegebene Funktion f durch $f(x) = x^3(1-x^2)$

Definitionsbereich: $/D = /R$

Symmetrie: $f(x) = x^3(1-x^2) = x^3 - x^5$

Der Funktionsterm enthält nur ungerade Potenzen von x. Also ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs:

Da $f(x) = x^3(1-x^2)$,
gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

x-Achse: $f(x) = 0$
 $\leftrightarrow x^3(1-x^2) = 0$
 $\leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$
(dreifache Nullstelle)

y-Achse: $f(0) = 0$

Ergebnisse: $S_x(0/0)$, $S_x(1/0)$, $S_x(-1/0)$ und $S_y(0/0)$

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 5x^4$
 $f''(x) = 6x - 20x^3$
 $f'''(x) = 6 - 60x^2$

Extrempunkte:

NB: $f'(x) = 0$
 $\leftrightarrow 3x^2 - 5x^4 = 0$
 $\leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x^4 = 0$
 $\leftrightarrow x^2 \left(1 - \frac{5}{3}x^2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x_2 = \frac{-\sqrt{15}}{5} \vee x_3 = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

HB: $f'(x)=0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = 0$$

$$f''\left(\frac{-\sqrt{15}}{5}\right) \approx 4,64 > 0$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \approx -4,64 < 0$$

Ergebnis: An der Stelle $x_2 = \frac{-\sqrt{15}}{5}$ liegt ein lok. Tiefpunkt vor und an der Stelle $x_3 = \frac{\sqrt{15}}{5}$ liegt ein lok. Hochpunkt vor. Die Untersuchung der Stelle $x=0$ wird im nächsten Abschnitt fortgesetzt.

$$T\left(\frac{-\sqrt{15}}{5} / \approx -0,1859\right) ; H\left(\frac{\sqrt{15}}{5} / \approx 0,1859\right)$$

Wendepunkte:

NB: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 6x - 20x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{20}{6}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 - \frac{10}{3}x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x = \frac{-\sqrt{30}}{10} \vee x = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

HB: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{-\sqrt{30}}{10}\right) = -12 \neq 0$$

$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

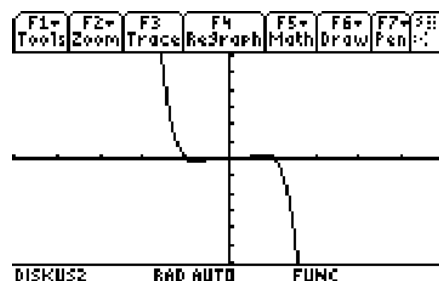
$$f'''\left(\frac{\sqrt{30}}{10}\right) = -12 \neq 0$$

Ergebnis: An den Stellen $x=0$, $x = \frac{-\sqrt{30}}{10}$ und $x = \frac{\sqrt{30}}{10}$ liegen Wendepunkte vor.

$$W_2\left(\frac{-\sqrt{30}}{10} / \approx -0,115\right) , W_3\left(\frac{\sqrt{30}}{10} / \approx 0,115\right)$$

An der Stelle $x=0$ liegt wegen $f'(0)=0$ (s.o.) ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente also ein Sattelpunkt $S(0/0)$ vor.

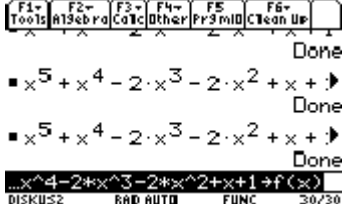
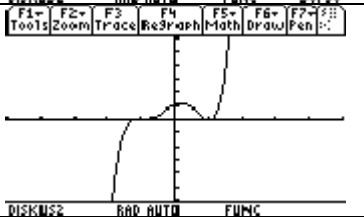
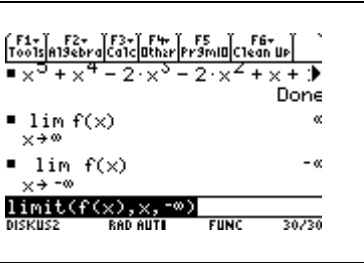
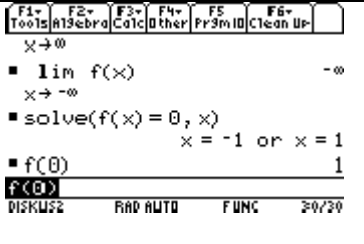
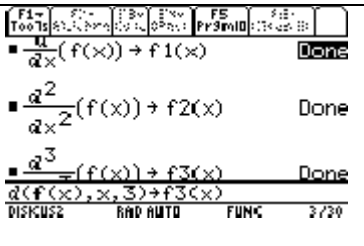
Zeichnung des Graphen $f(x) = x^3(1-x^2)$:



Aufgabe 5c

Funktionsdiskussion mit dem TI89

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

<p>Zunächst wird der Funktionsterm eingegeben und als $f(x)$ gespeichert. Die Funktion ist für alle reellen Zahlen x definiert.</p>	
<p>Zeichnung vom Graphen</p>	
<p><u>1. Symmetrie</u> Der Funktionsterm enthält sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x. Also ist der Graph von f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.</p>	
<p><u>2. Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches</u></p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$</p> <p>(Befehl: limit)</p>	
<p><u>3. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen</u></p> <p>1. Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ (Befehl: solve) 2. Achse: $f(0) = 1$</p> <p>Ergebnisse: $S_{x_1}(1/0)$, $S_{x_2}(-1/0)$ und $S_y(0/1)$</p>	
<p><u>Ableitungen</u></p> <p>$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$ $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 - 12x - 4$ (Befehl: differentiate) $f'''(x) = 60x^2 + 24x - 12$</p>	

4. Extrempunkte

Notwendige Bed.: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{5}$

Hinreichende Bed.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(1) = 16 > 0$$

$$f''(-1) = 0$$

$$f''\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{144}{25} < 0$$

Ergebnis: An der Stelle $x = 1$ liegt ein lok. Tiefpunkt und an

der Stelle $x = \frac{1}{5}$ ein lok. Hochpunkt vor.

$$T(1/0) ; H\left(\frac{1}{5} / \frac{3456}{3125}\right)$$

5. Wendepunkte

Notwendige Bed.: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{-(\sqrt{6}-1)}{5}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}+1}{5}$$

Hinreichende Bed.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-1) = 24 \neq 0$$

$$f'''\left(\frac{-(\sqrt{6}-1)}{5}\right) = \frac{48}{5} - \frac{48 \cdot \sqrt{6}}{5} \neq 0$$

$$f'''\left(\frac{\sqrt{6}+1}{5}\right) = \frac{48 \cdot \sqrt{6}}{5} + \frac{48}{5} \neq 0$$

Ergebnis: An den Stellen $x = 1$, $x = \frac{-(\sqrt{6}-1)}{5}$ und

$x = \frac{\sqrt{6}+1}{5}$ liegen Wendepunkte vor.

$$W_1(1/0) ; W_2\left(\frac{\sqrt{6}+1}{5} / \frac{1656}{3125} - \frac{84 \cdot \sqrt{6}}{3125}\right) ;$$

$$W_3\left(\frac{-(\sqrt{6}-1)}{5} / \frac{84 \cdot \sqrt{6}}{3125} + \frac{1656}{3125}\right)$$

6. Wertemenge

Der Wertebereich ist die Menge der reellen Zahlen: $/D = /R$