Aufgabe 2 *Kurvendiskussion von Exponential- und Logarithmusfunktionen*

a) Gegeben ist die Funktion f mit f(x)= $10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

f(x)=$10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

f´(x)=$e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(10-10x^2\right)$

f´´(x)=$e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(10x^3-30x\right)$

f´´´(x)=$e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-10x^4+60x^2-30\right)$

(1) Definitionsbereich
D_f=R

(2) Symmetrie
f(-x)= -$10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ = -f(x) → Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung

(3) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
x-Achse: f(x)=0
$\Leftrightarrow 10x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$ $\quad | e^{-\frac{1}{2}x^2}$ kann niemals 0 werden, deshalb bleibt nur noch 10x=0
$\Leftrightarrow$ x=0
$S_x(0|0)$
y-Achse: Aus der Symmetrie und dem Schnittpunkt mit der x-Achse folgt:
$S_y(0|0)$

(4) Extrempunkte
NB: f´(x)=0
$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(10-10x^2\right)=0$
$\Leftrightarrow$ x=1 $\vee$ x=-1
HB: f´(x)=0 $\wedge$ f´´(x) $\neq 0$
f´´(1)= $e^{-\frac{1}{2}}(10-30) = -20e^{-\frac{1}{2}} \approx -12{,}13 < 0$
An der Stelle x=1 liegt ein lokales Maximum vor.
f´´(-1) $\approx$ 12,13> 0 (Aufgrund der Symmetrie sofort erkennbar)
An der Stelle x=-1 liegt ein lokales Minimum vor.

f(1)=$10 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 6{,}07$ H(1|6,07)
f(-1) $\approx$ -6,07 T(-1|-6,07)

(5) Wendepunkte
NB: f´´(x)=0

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2}(10x^3-30x)=0$ $\quad | e^{-\frac{1}{2}x^2}$ kann niemals 0 werden, deshalb bleibt nur noch:
$\Leftrightarrow x(10x^2-30)=0$
$\Leftrightarrow$ x=0 $\vee$ x=$\sqrt{3}$ $\vee$ x=-$\sqrt{3}$
HB: f´´(x)=0 $\wedge$ f´´´(x)$\neq$ 0
f´´´(0)=-30 < 0
An der Stelle x=0 liegt ein Links-rechts-Wendepunkt vor.
f´´´($\sqrt{3}$)=$60\cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 13{,}39 > 0$
An der Stelle x=$\sqrt{3}$ liegt ein Rechts-links-Wendepunkt vor.
f´´´(-$\sqrt{3}$)$\approx$ 13,39 > 0 (Symmetrie)
An der Stelle x=-$\sqrt{3}$ liegt ein Rechts-links-Wendepunkt vor.

f(0)=0	$W_1(0\|0)$
f($\sqrt{3}$)=$10e^{-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{3} \approx 3{,}86$	$W_2(\sqrt{3}\|3{,}86)$
f(-$\sqrt{3}$)$\approx$-3,86	$W_3(-\sqrt{3}\|-3{,}86)$

b) Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x)=10x\cdot e^{-\frac{1}{2}t\cdot x}$ für t > 0.

i) Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

$f_t(x)=10x\cdot e^{-\frac{1}{2}t\cdot x}$

$f_t'(x)=e^{-\frac{1}{2}tx}(10-5xt)$

$f_t''(x)=e^{-\frac{1}{2}tx}\left(\frac{5}{2}t^2x-10t\right)$

$f_t'''(x)=e^{-\frac{1}{2}tx}\left(-\frac{5}{4}t^3x+\frac{15}{2}t^2\right)$

(1) Definitionsbereich
D_{ft}=R

(2) Symmetrie
$f_t(-x)= -10x\cdot e^{\frac{1}{2}tx} \neq f_t(x) \neq -f_t(x)$
Es liegt keine Symmetrie vor.

(3) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
x-Achse: $f_t(x)=0$
$\Leftrightarrow 10x\cdot e^{-\frac{1}{2}t\cdot x}=0$ $\quad | e^{-\frac{1}{2}t\cdot x}$ kann niemals 0 werden, deshalb bleibt nur noch
10x=0
$\Leftrightarrow$ x=0 $\quad S_x(0|0)$
y-Achse: $f_t(0)=0$ $\quad S_y(0|0)$

(4) Extrempunkte

NB: $f_t'(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}tx}(10-5xt)=0 \qquad | e^{-\frac{1}{2}t\cdot x}$ kann niemals 0 werden, deshalb bleibt nur noch:

$\Leftrightarrow 10-5xt=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{t}$

HB: $f_t'(x)=0 \wedge f_t''(x)\neq 0$

$f_t'\left(\frac{2}{t}\right)= e^{-\frac{1}{2}t\cdot\frac{2}{t}}\left(\frac{5}{2}t^2\cdot\frac{2}{t}-10t\right)= -5e^{-1}t<0$

An der Stelle x=$\frac{2}{t}$ liegt ein Hochpunkt vor.

$f_t\left(\frac{2}{t}\right)= 10\cdot\frac{2}{t}\cdot e^{-\frac{1}{2}t\cdot\frac{2}{t}}=\frac{20}{t}\cdot e^{-1} \qquad H\left(\frac{2}{t}\,|\,\frac{20}{\mathrm{t}}\cdot e^{-1}\right)$

(5) Wendepunkte

NB: $f_t''(x)=0$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}tx}\cdot\left(\frac{5}{2}t^2x-10t\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}t^2x-10t=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{10t}{\frac{5}{2}t^2}=\frac{4}{t}$

HB: $f_t''(x)=0 \wedge f_t'''(x)\neq 0$

$$f_t''\left(\frac{4}{t}\right)=e^{-\frac{1}{2}t\cdot\frac{4}{t}}\left(-\frac{5}{4}t^3\cdot\frac{4}{t}+\frac{15}{2}t^2\right)$$

$$=e^{-2}\left(-5t^2+\frac{15}{2}t^2\right)$$

$$=-5t^2e^{-2}+\frac{15}{2}t^2e^{-2}$$

$$=\frac{5}{2}t^2e^{-2}>0$$

An der Stelle $x=\frac{4}{t}$ liegt ein Rechts-links-Wendepunkt vor.

$$f_t\left(\frac{4}{t}\right)=10\cdot\frac{4}{t}\cdot e^{-\frac{1}{2}t\cdot\frac{4}{t}}$$

$$=\frac{40}{t}\cdot e^{-2}$$

$$W\left(\frac{4}{t}\,|\,\frac{40}{\mathrm{t}}\cdot e^{-2}\right)$$

ii) Bestimme die Gleichung der Ortskurve der Extrem- und Wendepunkte.
Ortskurve Extrempunkte

$$x = \frac{2}{t} \Rightarrow t = \frac{2}{x}$$

$$y = \frac{20}{t} \cdot e^{-1}$$

$$y(x) = \frac{20}{\frac{2}{x}} \cdot e^{-1} = 10e^{-1} \cdot x$$

(Die Ortskurve ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung $m = 10 \cdot e^{-1}$)

Ortskurve Wendepunkte

$$x = \frac{4}{t} \Rightarrow t = \frac{4}{x}$$

$$y = \frac{40}{t} \cdot e^{-2}$$

$$y(x) = \frac{40}{\frac{4}{x}} \cdot e^{-2} = 10e^{-2} \cdot x$$

iii) Nun sei t=1. Die Punkte O (0|0), P (a|0) und Q (a|f_1(a)) sind Eckpunkte eines Dreiecks. Für welches a>0 ist der Flächeninhalt des Dreiecks am Größten?

Der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet sich aus: $A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a)$

Einsetzen ergibt: $A(a) = 5a^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}a}$

mit den Ableitungen:

$$A'(a) = \left(10a - \frac{5}{2}a^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}a}$$

$$A''(a) = \left(\frac{5}{4}a^2 - 10a + 10\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}a}$$

Wir untersuchen A(a) auf Extrema:
Notwendige Bedingung: $A'(a) = 0$
$\Leftrightarrow a = 4$, da a>0 vorausgesetzt wurde.
Hinreichende Bedingung: $A'(a) = 0 \quad \wedge \quad A''(a) < 0$
$A''(4) = -10 \cdot e^{-2} < 0$
Also liegt an der Stelle a=4 ein lokales Maximum vor.
Den größten Flächeninhalt erhält man mit der Wendestelle, d.h. a=4:

$$A(4) = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot e^{-2} \approx 10{,}83$$

c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -10\frac{\ln(x)}{x^2}$.

i) Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

$$f(x) = -10\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{-10 + 20\ln(\mathrm{x})}{x^3}$$

$$f''(\mathrm{x}) = \left(\frac{50 - 60\ln(x)}{x^4}\right)$$

$$f'''(\mathrm{x}) = \frac{-260 + 240\ln(x)}{x^5}$$

(1) Definitionsbereich

$D_f = R^+$

(2) Symmetrie

$f(-x) = -10\frac{\ln(-x)}{x^2} \neq -f(x) \neq f(x)$

Es liegt also keine Symmetrie vor.

(3) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

x-Achse: f(x)=0

$\Leftrightarrow -10\frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S_x(1|0)$

Schnittpunkte mit der y-Achse gibt es nicht, weil für x nicht 0 eingesetzt werden darf.

(4) Extrempunkte

NB: f′(x)=0

$\Leftrightarrow \frac{-10 + 20\ln(x)}{x^3} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

HB: f′(x)=0 $\wedge$ f′′(x)$\neq 0$

$$f''(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{50 - 60\ln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}^4}$$

$$= \frac{20}{e^2}$$

$$= 20 \cdot e^{-2} > 0$$

An der Stelle $x=\sqrt{e}$ liegt ein lokales Minimum vor.

$$f\left(\sqrt{e}\right)=-10\frac{\ln\left(\sqrt{e}\right)}{\sqrt{e}^{2}}=-5\cdot e^{-1}\approx 1{,}84$$

$$T\left(\sqrt{e}\,|-5\cdot e^{-1}\right)$$

(5) Wendepunke

NB: f´´(x)=0

$$\Leftrightarrow \frac{50-60\ln(x)}{x^4}=0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow x=e^{\frac{5}{6}}\approx 2{,}3$$

HB: f´´ (x)=0 $\wedge$ f´´´ (x) $\neq$ 0

$$f'''\left(e^{\frac{5}{6}}\right)=\frac{-260+240\ln\left(e^{\frac{5}{6}}\right)}{\left(e^{\frac{5}{6}}\right)^5}=-60\cdot e^{-\frac{25}{6}}\approx -0{,}93<0$$

An der Stelle $x=e^{\frac{5}{6}}$ liegt ein Links-rechts-Wendepunkt vor.

$$f\left(e^{\frac{5}{6}}\right)=-10\frac{\ln\left(e^{\frac{5}{6}}\right)}{\left(e^{\frac{5}{6}}\right)^2}=-\frac{25}{3}\cdot e^{-\frac{5}{3}}\approx -1{,}57$$

$$W(2{,}3\,|-1{,}57)$$

ii) Die Wendetangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück im 4. Quadranten. Berechne dessen Flächeninhalt.

Gleichung der Wendetangente:

$$t(x)=f'(\mathrm{x}_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

$$= f'\left(e^{\frac{5}{6}}\right)\cdot\left(x-e^{\frac{5}{6}}\right)+f\left(e^{\frac{5}{6}}\right)$$

$$=\frac{-10+20\ln\left(e^{\frac{5}{6}}\right)}{\left(e^{\frac{5}{6}}\right)^3}\cdot\left(x-e^{\frac{5}{6}}\right)-\frac{25}{3}\cdot e^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\left(-10+\frac{50}{3}\right)\cdot e^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(x-e^{\frac{5}{6}}\right)-\frac{25}{3}\cdot e^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{20}{3}\cdot e^{-\frac{5}{2}}\cdot x-\frac{20}{3}\cdot e^{-\frac{5}{3}}-\frac{25}{3}\cdot e^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{20}{3}\cdot e^{-\frac{5}{2}}\cdot x-15e^{-\frac{5}{3}}$$

Schnittpunkt mit der x-Koordinate:

$t(x)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{3}e^{-\frac{5}{2}}\cdot x-15e^{-\frac{5}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{15e^{-\frac{5}{3}}}{\frac{20}{3}e^{-\frac{5}{2}}}=\frac{9}{4}e^{\frac{5}{6}}\approx 5{,}177$$

Schnittpunkt mit der y-Koordinate:

$$t(0)=-15e^{-\frac{5}{3}}\approx -2{,}83$$

Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 15e^{-\frac{5}{3}}\cdot\frac{9}{4}e^{\frac{5}{6}}$$

$$=\frac{135}{8}e^{-\frac{5}{6}}\approx 7{,}33$$

d) Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit $f_t(x)=\frac{\ln(x)}{t\cdot x}$ für $0<t\le 1$.

Gib den Definitionsbereich von f an. Untersuche den Graphen der Funktion auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

$$f_t(x)=\frac{\ln(x)}{t\cdot x}$$
$$f_t'(x)=\frac{t-\ln(x)\cdot t}{(t\cdot x)^2}$$
$$f_t''(x)=\frac{-3+2\ln(x)}{t\cdot x^3}$$
$$f_t'''(x)=\frac{11-6\ln(x)}{t\cdot x^4}$$

(1) Definitionsbereich
$D_{ft}=R^+$

(2) Symmetrie
$$f_t(-x)=\frac{\ln(-x)}{-tx}\neq -f(x)\neq f(x)$$
Es liegt keine Symmetrie vor.

(3) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
x-Achse: $f_t(x)=0$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{t\cdot x}=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$
$S_x(1|0)$
Schnittpunkte mit der y-Achse gibt es nicht, weil für x nicht 0 eingesetzt werden darf.

(4) Extrempunkte
NB: $f_t'(x)=0$
$$\Leftrightarrow \frac{t-\ln(x)\cdot t}{(t\cdot x)^2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x)=1$$
$$\Leftrightarrow x=e$$
HB: $f_t'(x)=0 \wedge f_t''(x)\neq 0$
$$f_t''(e)=\frac{-3+2}{t\cdot e^3}=-e^{-3}\cdot t^{-1}<0$$
An der Stelle x=e liegt ein lokales Maximum vor.
$$f(e)=\frac{1}{t\cdot e}=e^{-1}\cdot t^{-1}$$
$$H\left(e\mid e^{-1}t^{-1}\right)$$

(5) Wendepunkte
NB: $f_t''(x)=0$
$$\Leftrightarrow \frac{-3+2\ln(x)}{tx^3}=0$$
$$\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$
HB: $f_t''(x)=0 \wedge f_t'''(x)\neq 0$

$$f_t'''\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{11 - 6\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{t \cdot \left(e^{\frac{3}{2}}\right)^4} = \frac{2e^{-6}}{t} > 0$$

An der Stelle $x = e^{\frac{3}{2}}$ liegt ein Rechts-links-Wendepunkt vor.

$$f_t\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{t \cdot e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}}{t}$$

$$W\left(e^{-\frac{3}{2}} \mid \frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{2t}\right)$$